Calculus 3 Tentamen 2013

di 18 juni 2013 8:30-11:30 in de Koos Duppenhal (Tennishal)

Het tentamen bestaat uit 5 vraagstukkken. De puntenwaardering kunt u vinden aan het begin van de vraagstukken. Het maximaal aantal punten dat u kunt behalen is 90. U krijgt 10 punten gratis.

Opgave 1 (7+10=17 pt.)
Het begrensde en gesloten oppervlak $S \subset \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door de vergelijking $g(x,y,z) = 0$, waarbij

$$g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Hierin zijn a, b en c positieve getallen.

1. Toon aan dat het raakvlak in een punt $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$ gegeven wordt door de vergelijking $f(x,y,z) = 0$, met
$$f(x,y,z) = \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - 1. \tag{1}$$
2. Bepaal de extreme waarden van f op S.

Opgave 2 (7+10=17 pt.)
Laat $z = f(u,v)$, waarbij f een C^2-functie is. Door de substitutie $u = x^2 + y^2$ en $v = x + y$ is z ook op te vatten als functie van x en y.

1. Toon aan dat
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2(x-y)}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$
Hint: Gebruik de kettingregel om eerst z_x en z_y te bepalen.
2. Druk
$$(2u - v^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial u}$$
uit in x, y en de partiële afgeleiden van z naar x en y.
Hint: Ook z_u is een functie van x en y dus $\dfrac{\partial z_u}{\partial u} = \ldots$.

Opgave 3 (7+10=17 pt.)
Gegeven de tweede-orde differentiaalvergelijking $y''(x) + 4y(x) = \sin x$.

1. Bepaal alle oplossingen van de differentiaalvergelijking.
2. Ga voor de differentiaalvergelijking na of er een oplossing is voor het randvoorwaardeprobleem
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1\,.$$

Opgave 4 (7+10=17 pt.)

Beschouw het stelsels vergelijkingen

$$x_1 y_2^2 - 2x_2 y_3 = 1, \quad x_1 y_1^5 + x_2 y_2 - 4y_2 y_3 = -9, \quad x_2 y_1 + 3x_1 y_3^2 = 12.$$

1. Laat zien dat in de buurt van $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = (1, 0, -1, 1, 2)$ kunnen we het stelsels oplossen naar y_1, y_2 and y_3.

2. Met behulp van het resultaat van onderdeel 1 kunnen we y_1, y_2 en y_3 als functies van x_1 en x_2 beschouwen. Bereken $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(1,0)$, $\frac{\partial y_2}{\partial x_1}(1,0)$ en $\frac{\partial y_3}{\partial x_1}(1,0)$.

Opgave 5 (5+5+5+4+3=22 pt.)
Zij ω een 2-vorm in $\mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$\omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \big(x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy \big)$$

en schrijf S_r voor het boloppervlak met radius $r > 0$, d.w.z.
$S_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = r^2\}$.

1. We beschouwen de volgende parametrisatie van het boloppervlak:

$$\mathbf{X} : [0,\pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad (u_1, u_2) \mapsto (r \sin u_1 \cos u_2, r \sin u_1 \sin u_2, r \cos u_1).$$

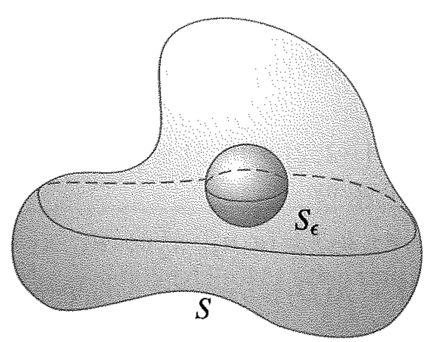
   Laat $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ en $\mathbf{N}$ de naar buiten gerichte normaal van S_r in het punt $\mathbf{X}(\mathbf{u}) \in S_r$. Toon aan dat $\mathbf{X}$ compatibel is met de orientatie geinduceerd door de 2-vorm die gegeven wordt door $\Omega_{\mathbf{X}(\mathbf{u})}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \det[\mathbf{N}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}]$. [Hint: merk op dat $\mathbf{N} = \frac{1}{r}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$ voor $(x,y,z) \in S_r$.]

2. Toon aan dat $\int_{S_r} \omega = 4\pi$.

3. Toon aan dat $d\omega = 0$.

4. Controleer de veralgemeniseerde stelling van Stokes voor het gebied $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 1\}$, waarbij $0 < a < 1$ constant mag worden verondersteld.

5. Laat S_ϵ het boloppervlak zijn met straal ϵ. Zij S een gesloten, begrensd (compact) oppervlak die S_ϵ volledig omvat, zoals gesuggereerd in het plaatje hieronder. Veronderstel dat S georienteerd wordt door de naar buiten staande normaal. Beargumenteer dat dan $\int_S \omega = 4\pi$.



Uitwerking

Opgave 1. 1. De vergelijking van het raakvlak in p aan S is $\nabla g(p)\cdot(\mathbf{x}-p)$, met $\mathbf{x}=(x,y,z)$ en $p=(x_0,y_0,z_0)$. Uitwerken geeft de vergelijking

$$\frac{2x_o}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_o}{b^2}(y-y_0)+\frac{2c_o}{c^2}(z-z_0)=0.$$

Gebruik $g(x_0,y_0,z_0)=0$ om hieruit de gevraagde vergelijking af te leiden.
2. Als $\mathbf{x}=(x,y,z)\in S$ een kritiek punt is van f op S, dan is er een $\lambda\in\mathbb{R}$ zodat

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{x})&=\lambda\nabla g(\mathbf{x})\\ g(\mathbf{x})&=0.\end{aligned}$$

Uitschrijven geeft

$$\begin{aligned}\frac{x_0}{a^2}&=2\lambda\frac{x}{a^2}\\ \frac{y_0}{b^2}&=2\lambda\frac{y}{b^2}\\ \frac{z_0}{c^2}&=2\lambda\frac{z}{c^2}\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}&=1. \qquad (2)\end{aligned}$$

Aangezien $(0,0,0)\notin S$, geldt $(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$, en dus $\lambda\neq 0$. Dus volgt

$$x=\frac{x_0}{2\lambda},y=\frac{y_0}{2\lambda},z=\frac{z_0}{2\lambda}.$$

Invullen in (2) geeft

$$\frac{1}{4\lambda^2}(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2})=1,$$

dus $\frac{1}{4\lambda^2}=1$. Hieruit volgt: $\lambda=\pm\frac{1}{2}$. De kritieke punten zijn dus $p=(x_0,y_0,z_0)$ en $q=(-x_0,-y_0,-z_0)$. Gegeven is dat S gesloten en begrensd is, en dus compact. Dus g neemt op S zijn maximum en zijn minimum aan. Aangezien $g(p)=0$ en $g(q)=-2$, volgt dat g op S een absoluut maximum heeft in p en een absoluut minimum in q.

Opgave 2.
1. Met de kettingregel leiden we af:

$$\begin{aligned}z_x&=2xz_u+z_v\\ z_y&=2yz_u+z_v.\end{aligned}$$

Oplossen van dit lineaire stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden z_u en z_v geeft

$$z_u=\frac{1}{2(x-y)}(z_x-z_y). \qquad (3)$$

2. Ook z_u is een functie van x en y. Er geldt dus:

$$\begin{aligned}z_{uu}=(z_u)_u&=\frac{1}{2(x-y)}((z_u)_x-(z_u)_y)\\ &=\frac{1}{2(x-y)}(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y})\big(\frac{1}{2(x-y)}(z_x-z_y)\big)\\ &=\frac{1}{2(x-y)^3}(z_y-z_x)+\frac{1}{4(x-y)^2}(z_{xx}-2z_{xy}+z_{yy}).\end{aligned}$$

Eenvoudig is af te leiden dat $2u - v^2 = (x-y)^2$. Samen met (3) levert dit

$$(2u - v^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Opgave 3. 1. [9 pt.] De oplossing van het homogene deel is $c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$. Een particuliere oplossing volgt door invullen van $y_p(x) = A\cos x + B \sin x$, hetgeen geeft

$$-(A\cos x + B\sin x) + 4(A\cos x + B\sin x) = sinx$$

met als oplossing $y_p(x) = \frac{1}{3}\sin x$. Dus alle oplossingen

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{3}\sin x$$

2. [6 pt.] Invullen van $y(0) = 0$ geeft $c_1 = 0$ terwijl invullen van $y(\pi) = 1$ geeft $c_1 = 1$ hetgeen strijdig is.

Opgave 4. 1. [6 pt.] Let$F_1 = x_1^2 y_2^2 - 2x_2 y_3$, $F_2 = x_1 y_1^5 + x_2 y_2 - 4y_2 y_3 = -9$, and $F_3 = x_2 y_1 + 3x_1 y_3^2$. Following the implicit function theorem we can locally solve $F_1 = 1$, $F_2 = -9$ and $F_3 = 12$ for y_1, y_2 and y_3 if

$$\det\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \frac{\partial F_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y_1} & \frac{\partial F_3}{\partial y_2} & \frac{\partial F_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x_1^2 y_2 & -2x_2 \\ 5x_1 y_1^4 & x_2 - 4y_3 & -4y_2 \\ x_2 & 0 & 6x_1 y_3 \end{bmatrix}$$
$$= -60x_1^4 y_1^4 y_2 y_3 - 8x_1^2 x_2 y_2^2 + 2x_2^3 - 8x_2^2 y_3 \neq 0.$$

For $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = (1, 0, -1, 1, 2)$ this determinant is -120.

2. [9 pt.] Take the partial derivative of the three equations with respect to x_1 to get

$$\begin{aligned} y_2^2 + 2x_1 y_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} - 2x_2 \frac{\partial y_3}{\partial x_1} &= 0, \\ y_1^5 + 5x_1 y_1^4 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} - 4y_3 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} - 4y_2 \frac{\partial y_3}{\partial x_1} &= 0, \\ x_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + 3y_3^2 + 6x_1 y_3 \frac{\partial y_3}{\partial x_1} &= 0. \end{aligned}$$

At $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = (1, 0, -1, 1, 2)$ these equations become

$$\begin{aligned} 1 + 2\frac{\partial y_2}{\partial x_1} &= 0, \\ -1 + 5\frac{\partial y_1}{\partial x_1} - 8\frac{\partial y_2}{\partial x_1} - 4\frac{\partial y_2}{\partial x_1} &= 0, \\ 12 + 12\frac{\partial y_3}{\partial x_1} &= 0. \end{aligned}$$

Solving, we find

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -\frac{7}{5}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \text{ and } \frac{\partial y_3}{\partial x_1} = -1.$$

Opgave 5. 1. [4 pt.] For the parametrization $\mathbf{X}$ we have $\mathbf{T}_{u_1} = r(\cos u_1 \cos u_2, \cos u_1 \sin u_2, -\sin u_1)$ and $\mathbf{T}_{u_2} = r(-\sin u_1 \cos u_2, \sin u_1 \cos u_2, 0)$. Then

$$\Omega_{\mathbf{X}(\mathbf{u})}(\mathbf{T}_{u_1}, \mathbf{T}_{u_2}) = \det \begin{pmatrix} \sin u_1 \cos u_2 & r\cos u_1 \cos u_2 & -r \sin u_1 \sin u_2 \\ \sin u_1 \sin u_2 & r\cos u_1 \sin u_2 & r\sin u_1 \cos u_2 \\ \cos u_1 & -r\sin u_1 & 0 \end{pmatrix} = r^2 \sin u_1 \geq 0.$$

In fact, this quantity is strictly greater than 0 when the parametrization is smooth and so the parametrization is compatible with the orientation.

2. [5 pt.] We note that on S_r we have $\omega = \frac{1}{r^3}(x\, dx \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy)$ as the denominator of the prefector in ω is $1/r^3$ on S_r. Therefore

$$\begin{aligned} \int_{S_r} \omega = \int_{\mathbf{X}} \omega = \frac{1}{r^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Big[& r\sin u_1 \cos u_2 \begin{vmatrix} r\cos u_1 \sin u_2 & r\sin u_1 \cos u_2 \\ -r\sin u_1 & 0 \end{vmatrix} \\ & + r\sin u_1 \sin u_2 \begin{vmatrix} -r\sin u_1 & 0 \\ r\cos u_1 \cos u_2 & -r\sin u_1 \sin u_2 \end{vmatrix} \\ & + r\cos u_1 \begin{vmatrix} -r\cos u_1 \cos u_2 & -r\sin u_1 \sin u_2 \\ r\cos u_1 \sin u_2 & r\sin u_1 \cos u_2 \end{vmatrix} \Big] du_1 du_2 \\ & = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin^3 u_1 + \cos^2 u_1 \sin u_1) du_1 du_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin u_1 du_1 du_2 \\ & = 2\pi(-\cos u_1)|_0^{\pi} = 4\pi. \end{aligned}$$

3. [4 pt.] Using

$$\begin{aligned} d\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] &= \frac{-(y^2+z^2-2x^2)dx - 3xydy - 3xzdz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ d\left[\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] &= \frac{-3xydx - (x^2+z^2-2y^2)dy - 3yzdz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ d\left[\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] &= \frac{-3xzdx - 3yzdy - (x^2+y^2-2z^2)dz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

we get

$$\begin{aligned} d\omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \big[& (y^2+z^2-2x^2) dx \wedge dy \wedge dz \\ & + (x^2 - 2y^2 + z^2) dy \wedge dz \wedge dx \\ & + (x^2+y^2-2z^2) dz \wedge dx \wedge dy \big] \end{aligned}$$

which is 0 on $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$.

4. [4 pt.] The boundary of M consists of the unit sphere S_1 and the sphere of radius a which we denoted by S_a. Following part 3 we know $\int_M d\omega = 0$. From part 2 we know that $\int_{S_1} \omega = 4\pi$. Using that S_a needs to be oriented by the normal vector pointing inward (i.e. outside of M) and the arguments in part 2 we get $\int_{S_a} \omega = -4\pi$. Hence $\int_M d\omega = \in_{\partial M} \omega$.

5. [3 pt.] Let region M be the region bounded by S from the outside and S_ϵ from the inside where S_ϵ is oriented by the inward normal. Then

$$0 = \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = \int_S \omega + \int_{S_\epsilon} \omega = \int_S \omega - 4\pi.$$

The very left and the very right of the chain of equalities give $\int_S \omega = 4\pi$.